Modelle und Methoden der Zeitreihenanalyse

Mike Hüftle

31. Juli 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Einordnung der Zeitreihenanalyse

Querschnittsdaten

In vielen Bereichen der Statistik geht man von Querschnittsdaten aus, also von Beobachtungen einer Größe, welche unter identischen oder kontrolliert variierten Bedingungen gewonnen wurden. Die Reihenfolge, in der diese Werte beobachtet wurden, spielt hier keine Rolle.

Längsschnittdaten

Im Gegensatz dazu ist die **(zeitliche) Abfolge von Längsschnittdaten** bei der Zeitreihenanalyse von Bedeutung.

Zeitreihen und stochastische Prozesse

Eine Zeitreihe im eigentlichen Sinne ist eine endliche Realisierung eines stochastischen Prozesses. Somit liegt jeder Zeitreihe ein stochastischer Prozess zugrunde. Mit ihm können über die konkrete Zeitreihe hinaus Aussagen über die zeitabhängigen zufälligen Merkmale gemacht werden.

1.2 Darstellung von Zeitreihen

Zwei Sichtweisen der Zeitreihenanalyse

Die Zeitreihenanalyse wird prinzipiell aus zwei Sichtweisen betrachtet. Zum einen kann eine Zeitreihe bzw. ein stochastischer Prozess im **Zeitbereich** untersucht werden, d.h. als eine Folge von (zufälligen) Werten.
Alternativ hierzu existiert die **Darstellung im Frequenzbereich**, d.h. als eine Überlagerung deterministischer oder stochastischer Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen wie beispielsweise die Auffassung des Lichtes als Überlagerung von Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen.

Zeit

In vielen Zeitreihen, insbesondere in der Ökonomie, ist der Parameter Zeit eine **endliche, diskrete Menge von äquidistanten Zeitpunkten**. Diese Zeitpunkte werden in der Regel durchnummeriert mit $t=1,2,\ldots k$.

Jedoch sind die meisten Methoden der Zeitreihenanalyse auch auf den Fall übertragbar, dass die Beobachtungen **unregelmäßig** durchgeführt wurden. Liegen **stetige Messungen** vor, wie beispielsweise in der Physik oder der Medizin, so wird für die Analyse häufig eine **Diskretisierung** durchgeführt.

1.3 Zeitreihenanalyse

Aufgaben der Zeitreihenanalyse

Die Zeitreihenanalyse hat im wesentlichen die Aufgaben Beschreibung, Modellierung, Bereinigung von Trends, saisonalen Komponenten und Zyklen sowie Glättung, Filterung und Prognose von Zeitreihen.

Beschreibung von Zeitreihen

Die **Beschreibung von Zeitreihen** dient einer vorläufigen Approximation der Zeitreihe mit dem Ziel, erste Regelmäßigkeiten zu entdecken, die bei der anschließenden Modellierung behilflich sind.
Die Beschreibung von Zeitreihen umfasst insbesondere die **Funktionsapproximation** (z.B. durch die Kleinste-Quadrate-Methode) und die **Zerlegung in die Hauptkomponenten** (Trendkomponente, Saisonkomponente, zyklische Komponente, irreguläre Restkomponente).

Modellierung von Zeitreihen

Bei der **Modellierung von Zeitreihen** wird die erste Beschreibung durch eine genauere Modellierung ergänzt. Dies beinhaltet die **Schätzung und Anpassung eines** stochastischen Modells, welches die Zeitreihe beschreibt.
Die Zeitreihe wird jetzt also exakter als eine **Folge von Zufallsvariablen** aufgefasst. Die stochastische Modellierung von Zeitreihen wird hier erläutert.

Glättung, Filterung, Prognose

Gegeben sei eine Zeitreihe von Beobachtungen x_1, x_2, ..., x_n.

Eine wichtige Aufgabe der Zeitreihenanalyse ist die Vorhersage zukünftiger Werte, wobei aus Zeitreihen oft nur **kurz- und mittelfristige Prognosen** getroffen werden. Eine **Prognose** berechnet dann die beste Schätzung für den Wert x_{n+h}. Langfristige Vorhersagen müssen zumeist noch weitere Informationen berücksichtigen, um geeignete Prognosen erzielen zu können.

Eine **Glättung** berechnet ein bestmögliches, korrigiertes x_i, indem es die Werte vor und nach x_i berücksichtigt.
Ein **Filter** berechnet eine optimale Schätzung für x_{n+h}, indem er alle Werte x_1, x_2, ..., x_n und eine ungenaue Messung für x_{n+h} berücksichtigt.

2 Methoden zur Analyse von Trends

2.1 Trendmodelle und Trendfunktionen

Trends in Zeitreihen

Bei der Zeitreihenanalyse versucht man häufig mit dem Trend die **langfristige Entwicklung** zu ermitteln.
Für die Untersuchung der Abhängigkeiten zwischen zwei Zeitpunkten einer Zeitreihe ist es manchmal notwendig eine **Trendbereinigung** vorzunehmen, also die Trendkomponente zu eliminieren.

Trendmodelle

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass sich eine Zeitreihe durch eine Funktion m_t und **zufalls- oder messfehlerabhängige Einflüsse** u_t darstellen lässt.
Es wird angenommen, dass sich eine Beobachtung x_t additiv aus m_t und u_t zusammensetzt. Die zufälligen Einflüsse u_t werden als unabhängige Realisierungen von Zufallsvariablen angenommen, deren Erwartungswerte 0 sind und deren Varianz in der Zeit konstant ist.

Trendfunktion

Zur Beschreibung eines Trends ist es nun erforderlich eine **geeignete Trendfunktion** zu den gegebenen Beobachtungen x_t auszuwählen. Hierfür existieren sowohl **lineare** als auch **nichtlineare Trendmodelle**.

2.2 Lineare und nichtlineare Trendmodelle

Lineares Trendmodell

Es existiert eine Reihe von Funktionen, die sich zur Trendschätzung eignen. Am bekanntesten ist der **lineare Trend mit der Trendschätzung**

$$m_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot t \tag{1}$$

d.h. die Trendschätzung ist eine lineare Funktion der Zeit t.

Die Parameter β_1 für den Ordinatenabschnitt der Schätzgeraden und β_2 für die Steigung der Geraden können mit der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden können. Diese wählt diejenige Gerade, welche die Summe der quadrierten Differenzen zwischen Beobachtungswert x_t und Funktionswert m_t minimal werden lässt.

Nichtlineare Trendmodelle

Allgemein können Trendfunktionen durch **Polynome p-ten Grades abgeschätzt werden** (die lineare Regression ist ein Polynom ersten Grades). Diese können ebenfalls mit der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt werden.

Generell sind die Schätzungen m_t um so besser, je höher der Polynomgrad p gewählt wird. **In der Praxis** werden jedoch meist nur Polynome bis zum zweiten Grad verwendet, da Polynome höheren Grades in der Prognose schnell divergieren und somit zu schlechteren Vorhersagewerten führen.

2.3 Exponential- und logistische Modelle

Trendmodelle mit Exponentialfunktion

Gelegentlich werden zur Trendschätzung Exponentialfunktionen der Form

$$x_t = e^{\beta_1 m_1(t) + \beta_2 m_2(t) + \ldots + \beta_k m_k(t) + u_t} \tag{2}$$

eingesetzt. Diese lassen sich **in ein lineares Trendmodell transformieren**. Gleiches gilt für Potenzmodelle der Form

$$x_t = m_1(t)^{\alpha_1} \cdot m_2(t)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot m_k(t)^{\alpha_k} \cdot u_t \tag{3}$$

Für bestimmte Problemstellungen kann es jedoch erforderlich sein, nichtlineare Modelle einzusetzen, die sich **nicht auf ein lineares Modell reduzieren lassen**. Dies ist beispielsweise bei einem Exponentialmodell der Fall, bei dem die Einflussgröße u_t additiv auftritt:

$$x_t = e^{\beta_1 + \beta_2 t} + u_t \tag{4}$$

Logistische Trendmodelle

Bei logistischen Trendfunktionen sind die Werte der Trendschätzungen beschränkt, so dass diese Funktionen insbesondere für **Wachstumsprozesse mit einer oberen Wachstumsgrenze** geeignet sind.
Ein typisches Modell einer logistischen Trendfunktion ist

$$m_t = \frac{B}{C + e^{-At}} \tag{5}$$

mit der **Sättigungsgrenze** $G = \frac{B}{C}$ und der **Wachstumsrate** $r(t) = A \cdot (1 - \frac{m_t}{G})$.

Je stärker sich m_t der Grenze G nähert, desto stärker wird die Wachstumsrate gesenkt und somit das Wachstum abgebremst. Die Bestimmung der ParameterA, B, C des logistischen Modells erfolgt mittels des Gauß-Newton-Verfahren

3 Methoden zur Analyse von zyklischen Schwankungen

3.1 Harmonische Schwingungen und Periodogramm

Zyklen

Zyklisch wiederkehrende Erscheinungen werden mit den Begriffen **Periode** und **Frequenz** beschrieben.
Die Periode gibt an, wie lange ein voller Zyklus dauert.
Die Frequenz besagt, wie oft ein Ereignis innerhalb einer Zeiteinheit auftritt, d.h. wie viele Zyklen pro Zeiteinheit ablaufen.

Harmonische Schwingungen

Die in der Zeitreihenanalyse dominierenden periodischen Funktionen sind harmonische Schwingungen, d.h. **Überlagerungen von Sinus- und Kosinuswellen**. Durch Überlagerung harmonischer Schwingungen verschiedener Frequenzen lassen sich auch komplizierte Funktionen darstellen.

Periodogramm

Eine häufige Fragestellung der Zeitreihenanalyse ist, solche **Periodizitäten in Zeitreihen aufzudecken**. Dies kann mittels eines Periodogramms oder Stichprobenspektrums erreicht werden.

Das **Periodogramm** ist eine Funktion $I(\lambda)$ der Frequenz λ und gibt für jede Frequenz an, mit welcher Intensität harmonische Wellen dieser Frequenz in der Ausgangsreihe vorkommen.

Ob im Periodogramm erscheinende **Peaks** tatsächlich periodischen Erscheinungen in der Realität entsprechen kann erst durch weitergehende Untersuchungen der dahinter liegenden stochastischen Prozesse beantwortet werden. Das Periodogramm dient lediglich als **Hilfsmittel zu Aufdeckung von Periodizitäten**.

3.2 Analyse von Periodogrammen

Verfälschungs-Effekte

Bei der Analyse des Periodogrammes müssen drei Effekte berücksichtigt werden, welche die **Interpretation erschweren**.
Sie werden als „Leakage“ (Durchsickern), „Aliasing“ (Maskierung) und „Auftauchen von Oberschwingungen“ bezeichnet. Um grobe **Fehlinterpretationen zu vermeiden**, muss insbesondere das Zusammenwirken von Aliasing-Effekt und dem Auftauchen von Oberschwingungen beachtet werden.

Leakage-Effekt

Als Leakage wird der Effekt bezeichnet, dass im Periodogramm bei einer harmonischen Schwingungskomponente einer Zeitreihe nicht nur bei der Frequenz λ, sondern auch in der **Umgebung von** λ eine Erhöhung der Funktionswerte beobachtet werden kann.

Aliasing-Effekt

Der Aliasing-Effekt entsteht durch die **diskrete Messung einer kontinuierlichen Zeitreihe** und hat zur Folge, dass kurzwellige Schwingungen der realen Zeitreihe im Periodogramm **als langwellige Schwingungen erscheinen**.

Auftauchen von Oberschwingungen

Als Auftauchen von Oberschwingungen bezeichnet man den Effekt, dass im Periodogramm einer Zeitreihe häufig nicht nur eine bestimmte Fundamentalfrequenz λ, sondern auch die Oberschwingungen 2λ, 3λ, ... einen Peak aufweisen.

Oft tritt dieser Effekt in ökonomischen Zeitreihen auf, wenn **Peaks an mehreren Saisonfrequenzen** vorkommen. Diese Peaks sind keine Hinweise auf eigenständige Periodizitäten, sondern höchstens Anhaltspunkte für die Form der Saisonfigur.

4 Methoden zur Analyse von Saisonkomponenten in Zeitreihen

4.1 Saisonale Schwankungen

Saisonbereinigung

Vor allem in ökonomischen Zeitreihen findet man häufig **ausgeprägte saisonale Schwankungen**.
Saisonbereinigten Reihen dienen der Untersuchung, wie sich eine Zeitreihe entwickelt hätte, wenn sie keinen saisonalen Schwankungen unterworfen wäre (beispielsweise bei der Entwicklung der Arbeitslosigkeit).

Verfahren zur Saisonbereinigung

Die bekanntesten Verfahren zur Saisonbereinigung sind das Phasendurchschnittsverfahren,das Census-Verfahren und das Berliner Verfahren.

4.2 Phasendurchschnittsverfahren

Analyse trendfreier Zeitreihen

Liegt eine **trendbereinigte oder eine Zeitreihe ohne Trend** vor, so kann man eine Schätzung für die Saisonkomponente und somit die saisonale Bereinigung mit dem **Phasendurchschnittsverfahren** durchführen.

Methodenbeschreibung

Dessen Ablauf lässt sich in **vier Schritte** gliedern:

1. Es werden für alle perioden (z.B. für alle Monate) **Phasendurchschnitte** gebildet. Diese werden als **arithmetisches Mittel** aller Beobachtungen der gleichen Periode berechnet.
2. Der **Gesamtdurchschnitt aller Phasendurchschnitte** wird gebildet.
3. Die **Saisonindexziffern** werden als Verhältnis von Phasendurchschnitt zu Gesamtdurchschnitt berechnet.
4. Schließlich werden im vierten Schritt die Beobachtungen durch eine zugehörige **Saisonindexziffer dividiert**.

Man erhält somit einen saisonbereinigten Wert für jede Periode eines Jahres. Da sich in der Praxis das **saisonale Verhalten im Lauf der Zeit verändert** und zudem meist unter dem **Einfluss von Trends** steht, wird das Phasendurchschnittsverfahren kaum noch angewendet.

4.3 Census- und Berliner-Verfahren

Zur Saisonbereinigung ökonomischer Zeitreihen werden komplexe Verfahren angewendet. Die bekanntesten sind das Berliner und das Census X11-Verfahren, das ASA II-Verfahren sowie das BV4.1-Verfahren [], welches vom Statistischen Bundesamt eingesetzt wird.

Census X12

Das Census-Verfahren in seiner jüngsten Version als Census X-12-ARIMA wird unter anderem von der Deutschen Bundesbank, der Europäischen Zentralbank und dem U.S. Bureau of the Census eingesetzt. []

In einer ersten Phase modelliert das Verfahren die Zeitreihe mittels der RegARIMA-Technik, die **regressionsanalytische Instrumente** mit dem **ARIMA-Ansatz** verknüpft. Anschließend wird die Saisonbereinigung durchgeführt indem zuerst die **Originaldaten bereinigt** (insbesondere von Kalenderunregelmäßigkeiten und Ausreißern) und geglättet werden. Dann wird eine saisonbereinigte Reihe mittels gleitender Durchschnitte berechnet.

Berliner Verfahren

Das Berliner Verfahren wird vom Statistischen Bundesamt eingesetzt und schätzt die Saisonkomponente mittels eines **trigonometrischen Polynoms**.

Zur Saisonbereinigung werden so genannte **reihenspezifische Filter** eingesetzt, d.h. aus einer großen Anzahl an Filtern wird ein solcher ausgesucht, der den Besonderheiten einer spezifischen Zeitreihe am meisten entspricht.

5 Methoden zur Glättung und Filterung von Zeitreihen

5.1 Glättung

Ausschalten von irregulären Schwankungen

Neben der Bestimmung von Trends ist häufig die Glättung von Zeitreihen von Bedeutung. Glättung bedeutet in diesem Sinne das **Ausschalten von unregelmäßigen Schwankungen der Zeitreihe durch lokale Approximationen** wie beispielsweise das lokale arithmetische Mittel.

Anpassung mit dem arithmetischen Mittel

Beim gleitenden Durchschnitt wird in kleinen Zeitintervallen eine **lokale Anpassung** vorgenommen, indem jeder Beobachtungswert x_t durch ein gewichtetes Mittel aus x_t und benachbarten Werten von x_t ersetzt wird.

5.2 Gleitender Durchschnitt

Einfacher gleitender Durchschnitt

Unter dem einfachen gleitenden Durchschnitt für den Wert einer Zeitreihe versteht man **das arithmetische Mittel der** *2m+1* **Werte** x_{t-m}, ..., x_t, ..., x_{t+m}:

$$\bar{x}_t = \frac{1}{2m+1} \sum_{j=-m}^{m} x_{t+j} \quad t = m+1, \dots n-m \tag{6}$$

Bei *m =1* spricht man beispielsweise von der einfachen 3-Punkte-Glättung, für *m=2* von der einfachen 5-Punkte-Glättung.

Die Glättung der Zeitreihe ist um so stärker, je mehr Werte zur Glättung herangezogen werden.

Randergänzung

Die so geglättete Zeitreihe besitzt nur noch *n-2m* Werte, da an den Enden jeweils *m* Werte wegfallen. Dies ist oft nicht akzeptabel. Es existieren daher verschiedene **Verfahren der Randergänzung** (z.B. die Anwendung eines Prognoseverfahrens zur Ergänzung fehlender Werte).

5.3 Exponentielle Glättung

Methodenbeschreibung

Beim Exponentiellen Glätten sind die Gewichte, mit denen die Beobachtungswerte in die Glättung eingehen, unterschiedlich:

$$x_t* = \sum_{j=0}^{\infty} w_j x_{t-j} \tag{7}$$

mit den Gewichten $w_j = \alpha(1-\alpha)^j \; j = 0, 1, 2, ...$ Die Konstante α mit $0 < \alpha < 1$ heißt **Glättungsfaktor**. Die Gewichte w_j nehmen mit wachsendem j exponentiell ab. Je kleiner α ist, umso mehr historische Werte der Zeitreihe werden zur Glättung herangezogen. α wird üblicherweise durch Berechnung mehrerer Testreihen und Vergleich mit den beobachteten Werten ausgewählt und liegt meist zwischen 0.1 und 0.3.

Anwendung

Da das Verfahren der exponentiellen Glättung immer nur einen Schritt in die Zukunft prognostiziert wird es auch als 1-Schritt-Prognoseverfahren bezeichnet. Aufgrund der einfachen Implementierbarkeit und des geringen Speicherbedarf gehört diese Methode zu den **beliebtesten Prognoseverfahren in der Ökonomie**. Durch die geringe Rechenintensität ermöglicht es die gleichzeitige Prognose von mehreren hundert Zeitreihen.

Varianten

Es existieren zahlreiche Varianten dieser Prognosemethode wie das **doppelte exponentielle Glätten** oder das **dreifache exponentielle Glätten**, mit denen sich auch lineare und parabolische Trends schätzen lassen.
Das Verfahren von HOLT und WINTERS verallgemeinert das exponentielle Glätten soweit, dass auch die Prognose von saisonalen Reihen mit Trend möglich ist.

5.4 Filterung

Filter

Ein **Filter** berechnet eine optimale Schätzung für x_{n+h}, indem er alle Werte x_1, x_2, ... x_n und eine ungenaue Messung für x_{n+h} berücksichtigt.
Die Anwendung eines Filters auf eine Zeitreihe wird **Filterung** oder Filtration genannt.

Lineare Filter

Unter einem linearen Filter versteht man eine **lineare Transformation einer Zeitreihe** x_t in eine andere Zeitreihe x_t*

$$x_t* = \sum_{j=-m}^{r} w_j x_{t+j} \;\; m, r \in N \tag{8}$$

Die Konstanten w_j heißen **Gewichte**. Die Wahl von m, r und w_j ist so vorzunehmen, dass die **lokale Anpassung möglichst gut** wird. Zu einer genaueren Diskussion der Parameterwahl sei auf die Spezialliteratur zur Zeitreihenanalyse verwiesen.

Ein ähnliches Problem tritt bei **Zustandsraummodellen** auf, bei denen der zu schätzende und der beobachtete Prozess geeignet miteinander verknüpft werden. Diese Modelle wurden **in der Regelungstechnik entwickelt** und werden zum Teil auch für die Filterung empirischer Zeitreihen herangezogen. Mehr Informationen zu Zustandsraummodellen und Optimalfiltern finden Sie hier.

Anwendung

Die exponentielle Glättung wird **bei trend- und saisonbereinigten Zeitreihen** zu Prognosen verwendet. Varianten der exponentiellen Glättung, die sich zur Prognose von Zeitreihen mit Saison- und Trendkomponenten eignen, wurden von Holt und Winters entwickelt.

5.5 Differenzenfilter

Differenzenfilter dienen dazu, **polynomiale Trends** durch Differenzenbildung benachbarter Werte einer Zeitreihe zu beseitigen.

Linearer Differenzenfilter

Der lineare Differenzenfilter 1. Ordnung Δ ist definiert als:

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-1} \;\; t = 2, 3, ..., n \tag{9}$$

Differenzenfilter p-ter Ordnung sind rekursiv definiert als:

$$\Delta^p x_t = \Delta^{p-1} x_t - \Delta^{p-1} x_{t-1} \;\; t = p+1, ..., n \tag{10}$$

Elimination von Trends

Zur Elimination von Trends einer Zeitreihe bildet man so lange Differenzen, bis man eine **Zeitreihe ohne Trend** erhält. Die Anzahl der Differenzenbildungen entspricht dann dem Grad des Ausgangspolynoms.

Elimination von Saisonkomponenten

Differenzenfilter werden auch zur Elimination von Saisonkomponenten eingesetzt. Hierfür werden die **saisonalen Differenzen** P-ter Ordnung gebildet. Auch ist die Kombination von saisonalen Differenzen P-ter mit trendbereinigenden Differenzen p-ter Ordnung möglich.

Anwendung

Für ökonomische Fragestellungen ist es oft ausreichend, die Differenzen 1. Ordnung zu bilden. Der Differenzenfilter wird beispielsweise im Box-Jenkins-Ansatz eingesetzt.

6 Literatur

6.1 Literatur zur Zeitreihenanalyse

Literaturverzeichnis

Einführende Literatur

Anderson, T.W.: The Statistical Analysis of Time Series. Wiley, New York 1971. Brown, R.G.: Smoothing, Forecasting and Prediction. Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall 1962. Harvey, A.C.: Zeitreihenmodelle. 2.Aufl., Oldenbourg, München Wien 1995. Leiner, B.: Einführung in die Zeitreihenanalyse. 2. Aufl., München, Oldenburg 1986. Mertens, P. (Hrsg.): Prognoserechnung. 4. Aufl., Physica, Würzburg 1981. Schlittgen, R./Streitberg, H.J.: Zeitreihenanalyse. 3. Aufl., München Oldenburg 1989. Schmitz, B.: Einführung in die Zeitreihenanalyse. 1. Aufl., Huber, Bern Stuttgart Toronto 1989.

Literaturverzeichnis

Weiterführende Literatur

Box, G.E.P./Jenkins, G.M.: Time Series Analysis, Forecasting and Control. Holden Day, San Francisco 1970. Fahrmeir,L.: Rekursive Algorithmen für Zeitreihenmodelle. Vandenhoek & Ruprecht, Göttingen 1981. Holt, C.C.: Forecasting seasonals and trends by exponentially weighted moving averages. Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, Pennsylvania 1957. Stier, W.: Verfahren zur Analyse saisonaler Schwankungen in ökonomischen Zeitreihen. Springer, Berlin 1980. Literatur zum Census-Verfahren: http://www.bundesbank.de/download/volkswirtschaft/mba/1999/199909mba_census.pdf (03.12.2005) Literatur zum BV4.1-Verfahren: http://www.destatis.de/download/veroe/methodenberichtbv41.pdf (03.12.2005)